IFT6170 Devoir 3

à rendre au début du cours le mercredi 5 novembre 1997

Équivalence de problèmes sur les codes [4 points]

Démontrez l'équivalence polynomiale des problèmes PMCS0 et PPMC restreints aux mots de codes (dans les deux directions).

Duaux [4 points]

Donnez pour chaque q, le plus grand ϵ_q que vous puissiez pour lequel il existe une famille de codes $\{C_n\}_{n>n_0}$ et sa famille de codes duaux $\{C_n^\perp\}_{n>n_0}$ constituées de codes linéaires $C_n, C_n^\perp \subseteq \mathcal{F}_q^n$ qui soient tous deux de distance minimale $\epsilon_q n$. Justifiez votre réponse. Quelle est la valeur de $\lim_{q\to\infty} \epsilon_q$?

Donnez le plus petit ϵ que vous puissiez pour lequel il n'existe pas de famille de codes $\{C_n\}_{n>n_0}$ et sa famille de codes duaux $\{C_n^\perp\}_{n>n_0}$ constituées de codes linéaires $C_n, C_n^\perp \subseteq \mathcal{F}_2^n$ dont la distance minimale **moyenne** des deux soit ϵn. Justifiez votre réponse.

Codes Intersectants [8 points]

On dit qu'un code C engendré par $\mathbf{G}$ est *intersectant* si pour toute paire de mots de codes $c_0, c_1 \in C - \{\mathbf{0}\}$ il existe une position i où $c_0^i \neq 0 \neq c_1^i$. Soit $\mathbf{G}$ la matrice génératrice $n \times k$ d'un code *intersectant* sur $\mathcal{F}_2$.Par exemple la matrice $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ engendre un code intersectant puisque ses mots de codes sont $000, 110, 011, 101$ et que $110, 101$ intersectent en position 1, $110, 011$ intersectent en position 2, et $011, 101$ intersectent en position 3.

1. Montrez que deux mots binaires c_0, c_1 intersectent si et seulement si $w(c_0 \oplus c_1) \neq w(c_0) + w(c_1)$.
2. Donnez un code intersectant binaire de longueur $n = 18$ et dimension $k = 6$.
3. Montrez que pour un $[n, k, d]$ code intersectant binaire on a toujours $d \geq k$.
4. Montrez qu'asymptotiquement il n'existe pas de code intersectant binaire pour $n < 3.53k$.
5. Montrez qu'asymptotiquement il existe un code intersectant binaire pour $n > 4.81k$.